33

Systemidentifikation

33.1 Kontinuierliche Verfahren im Frequenzbereich

33.1.1 Direkte Berechnung der Koeffizienten

Dieses Verfahren ist besonders einfach und bietet dennoch in vielen Fällen eine gute Genauigkeit. Als Messdaten müssen vom zu Identifizierenden System der Frequenzgang nach Betrag und Phase oder als Real- und Imaginärteil vorliegen.

An diese Messdaten soll dann ein Modell der Form

$$G(s) = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1\, s + \tilde{b}_2\, s^2 + \ldots + \tilde{b}_m\, s^m}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1\, s + \tilde{a}_2\, s^2 + \ldots + \tilde{a}_n\, s^n} \tag{33.1}$$

angepasst werden, sodass das Modell innerhalb des gemessenen Frequenzbereichs die Fehlerquadrate minimiert.

Man dividiere zunächst Zähler und Nenner jeweils durch $\tilde{a}_0$ und erhält

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1\, s + b_2\, s^2 + \ldots + b_m\, s^m}{1 + a_1\, s + a_2\, s^2 + \ldots + a_n\, s^n} \tag{33.2}$$

was ohne Beschränkung der Allgemeinheit möglich ist. Die Übertragungsfunktion wird für mehrere s_k gemessen, bzw. es liegen für mehrere s_k bereits solche Messdaten vor, sodass für jede Frequenz die Gleichung

$$G(s_k) = p_k + \mathrm{j}\, q_k \tag{33.3}$$

erfüllt sein soll. Dies setzt man nun bei Gl. 33.2 ein und erhält:

$$\frac{b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m}{1 + a_1\, s_k + a_2\, s_k^2 + \ldots + a_n\, s_k^n} = p_k + \mathrm{j}\, q_k \tag{33.4}$$

Nachdem man beide Seiten mit dem Hauptnenner multipliziert hat, ergibt sich hieraus

$$b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m = (p_k + \mathrm{j}\, q_k) \cdot \left(1 + a_1\, s_k + a_2\, s_k^2 + \ldots + a_n\, s_k^n\right)$$

und nach dem Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} &b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m = \\ &p_k + p_k\, a_1\, s_k + p_k\, a_2\, s_k^2 + \ldots + p_k\, a_n\, s_k^n + \mathrm{j}\, q_k + \mathrm{j}\, q_k\, a_1\, s_k + \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, s_k^2 + \ldots + \mathrm{j}\, q_k\, a_n\, s_k^n \end{aligned} \tag{33.5}$$

Nun bringt man alle Terme, in denen p_k und q_k für sich alleine sind, auf die rechte und alle Terme die s_k enthalten auf die linke Seite:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\, s_k + b_2\, s_k^2 + \ldots + b_m\, s_k^m \\ -p_k\, a_1\, s_k - p_k\, a_2\, s_k^2 - \ldots - p_k\, a_n\, s_k^n \\ -\mathrm{j}\, q_k\, a_1\, s_k - \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, s_k^2 - \ldots - \mathrm{j}\, q_k\, a_n\, s_k^n \\ = p_k + \mathrm{j}\, q_k \end{aligned} \tag{33.6}$$

Mit

$$s_k = \mathrm{j}\, \omega_k \tag{33.7}$$

wird hieraus schliesslich

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\, (\mathrm{j}\, \omega_k) + b_2\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^2 + \ldots + b_m\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^m \\ -p_k\, a_1\, (\mathrm{j}\, \omega_k) - p_k\, a_2\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^2 - \ldots - p_k\, a_n\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^n \\ -\mathrm{j}\, q_k\, a_1\, (\mathrm{j}\, \omega_k) - \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^2 - \ldots - \mathrm{j}\, q_k\, a_n\, (\mathrm{j}\, \omega_k)^n \\ = p_k + \mathrm{j}\, q_k \end{aligned} \tag{33.8}$$

und nach Ausmultiplizieren der Potenzen, wobei die Potenzen der imaginären Einheit j berücksichtigt werden müssen:

$$\begin{aligned} b_0 + \mathrm{j}\, b_1\, \omega_k - b_2\, \omega_k^2 - \mathrm{j}\, b_3\, \omega_k^3 \pm \ldots \\ -\mathrm{j}\, p_k\, a_1\, \omega_k + p_k\, a_2\, \omega_k^2 - \mathrm{j}\, p_k\, a_3\, \omega_k^3 \pm \ldots \\ +a_1\, q_k\, \omega_k + \mathrm{j}\, q_k\, a_2\, \omega_k^2 - q_k\, a_3\, \omega_k^3 \mp \ldots \\ = p_k + \mathrm{j}\, q_k \end{aligned} \tag{33.9}$$

Versucht man nun, direkt diese komplexwertige Gleichung zu lösen, so kann man nicht garantieen, dass mit den verwendeten numerischen Methoden nur rein reellwertige Koeffizienten a_i und b_i gefunden werden. Daher ist es einfacher, die Gleichung gleichzeitig für den Real- und den Imaginärteil zu lösen. Der Realteil lautet

$$\begin{aligned} b_0 - b_2\, \omega_k^2 + b_4\, \omega_k^4 - b_6\, \omega_k^6 \pm \ldots \\ +p_k\, a_2\, \omega_k^2 - p_k\, a_4\, \omega_k^4 + p_k\, a_6\, \omega_k^6 \mp \ldots \\ +q_k\, a_1\, \omega_k - q_k\, a_3\, \omega_k^3 + q_k\, a_5\, \omega_k^5 \mp \ldots \\ = p_k \end{aligned} \tag{33.10}$$

während

$$\begin{aligned} b_1\, \omega_k - b_3\, \omega_k^3 + b_5\, \omega_k^5 - b_7\, \omega_k^7 \pm \ldots \\ -p_k\, a_1\, \omega_k + p_k\, a_3\, \omega_k^3 - p_k\, a_5\, \omega_k^5 \pm \ldots \\ +q_k\, a_2\, \omega_k^2 - q_k\, a_4\, \omega_k^4 + q_k\, a_6\, \omega_k^6 \mp \ldots \\ = q_k \end{aligned} \tag{33.11}$$

der Imaginärteil ist. In Matrizenform können diese beiden Gleichungen für den k-Ten Frequenzpunkt mit der Matrix $\mathbf{A}_k$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega_k^2 & 0 & \omega_k^4 & 0 & -\omega_k^6 & \ldots & q_k\, \omega_k & p_k\, \omega_k^2 & -q_k\, \omega_k^3 & -p_k\, \omega_k^4 & \ldots \\ 0 & \omega_k & 0 & -\omega_k^3 & 0 & \omega_k^5 & 0 & \ldots & -p_k\, \omega_k & q_k\, \omega_k^2 & p_k\, \omega_k^3 & -q_k\, \omega_k^4 & \ldots \end{pmatrix}$$

sowie dem Koeffizientenvektor $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \end{pmatrix}$$

und dem Vektor mit dem Real- und Imaginärteil

$$\mathbf{b}_k^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} p_k & q_k \end{pmatrix}$$

wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{33.12}$$

Wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_N \end{pmatrix} \tag{33.13}$$

ist. Der Koeffizientenvektor $\mathbf{x}$ kann dann mit der Pseudoinversen Matrix $\mathbf{A}^+$ gefunden werden:

$$\mathbf{x} \approx \underbrace{\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}\right)^{-1}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{A}^+}\,\mathbf{b} \tag{33.14}$$

Das Verfahren scheint auf den ersten Blick sehr einfach. Ein Problem entsteht allerdings, wenn die Frequenzen, für die das Modell gelten soll, sehr gross sind. In diesem Fall enthält die Matrix $\mathbf{A}$ betragsmässig sehr kleine Elemente (z.B. 1 und ω_k) als auch sehr grosse (aufgrund der Potenzen ω_k^m bzw. ω_k^n). Dies führt dazu, dass die Kondition des Gleichungssystems schlecht wird, was sich in einer grossen Konditionszahl $\operatorname{cond}\mathbf{A}$ äussert.

Abhilfe kann man schaffen, indem man die Frequenz normiert, also

$$\omega_k' = \frac{\omega_k}{\max \omega_k} \tag{33.15}$$

setzt und dann mit den ω_k' rechnet. Dies liefert eine besser konditionierte Matrix $\mathbf{A}$ und damit eine numerisch stabilere Lösung.

Beispiel 207
Gegeben sind Frequenzgang-Messwerte eines Filters 4. Ordnung im Bereich von 4.91 MHz bis 4.93 MHz. Diese sind in Abb. 33.1 rot dargestellt. Mit dem oben dargestellten Verfahren wird ein optimales Modell gefunden mit 5 Koeffizienten. Die Zählerkoeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} b_5 &= 1.4018 \cdot 10^{-6} \\ b_4 &= 3.1242 \cdot 10^{-6} \\ b_3 &= 110.3835 \cdot 10^{-6} \\ b_2 &= 246.0005 \cdot 10^{-6} \\ b_1 &= 2.1730 \cdot 10^{-3} \\ b_0 &= 4.8426 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Und die Nennerkoeffizienten:

$$\begin{aligned} a_5 &= -63.2635 \cdot 10^{-9} \\ a_4 &= 647.6893 \cdot 10^{-6} \\ a_3 &= -4.1123 \cdot 10^{-6} \\ a_2 &= 50.8995 \cdot 10^{-3} \\ a_1 &= -63.9084 \cdot 10^{-6} \\ a_0 &= 1.0000 \end{aligned}$$

Mit diesen Parametern erhält man eine Modell-Übertragungsfunktion, welche im normierten Frequenzbereich – wo also 4.93 MHz der normierten Frequenz 1 entsprechen – eine minimale Abweichung zu den MEssdaten ergibt. □

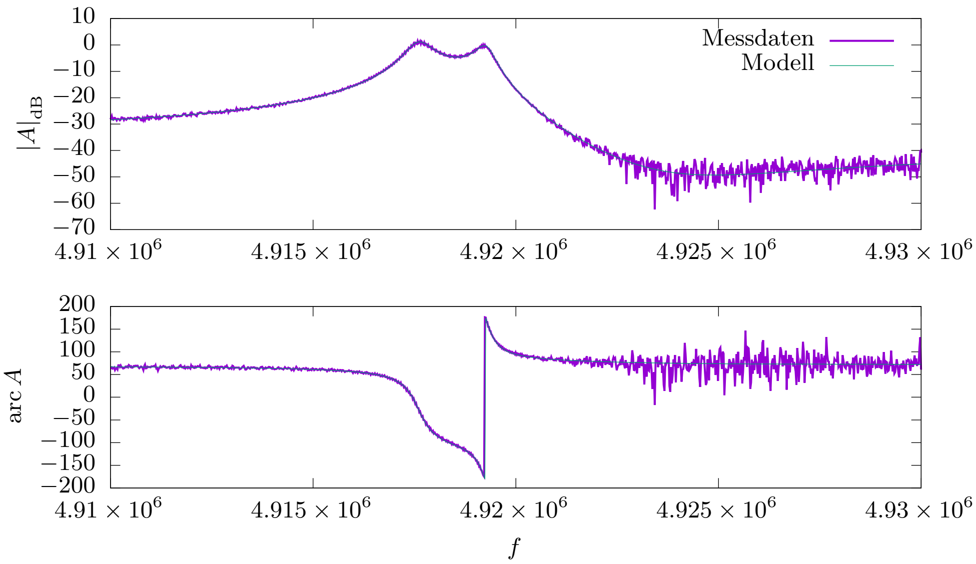

Abb. 33.1. Vergleich der realen Messdaten und der identifizierten Übertragungsfunktion